Probleme mit Modellen – Anmerkungen zu zwei Abituraufgaben

GERD RIEHL, BARSINGHAUSEN

Zusammenfassung: *Die Analyse zweier scheinbar anwendungsbezogener Aufgaben aus dem Zentralabitur des Landes Berlin zeigt nicht nur Probleme für die Prüflinge bei der Modellierung des Sachzusammenhangs, sondern auch für die Konstrukteure der Aufgaben, wenn das zur Lösung vorgesehene und vom Prüfling erwartete Modell zu weit von den realen Bedingungen der jeweiligen Anwendungssituation abweicht.*

1 Einleitung

Eine wesentliche Kompetenz für die Lösung einer stochastischen Aufgabe besteht darin, für deren nichtmathematischen Sachverhalt ein angemessenes mathematisches Modell zu finden. Die im Modell gefundene Lösung des Problems ist dann im realen Sachverhalt der Aufgabenstellung zu interpretieren, wobei auch die Grenzen des Modells zu beachten sind. Beispiele zu diesem Themenkomplex werden in den Abschnitten 2 und 4 behandelt.

Aufgaben aus dem Erfahrungsbereich Jugendlicher sollen motivierend wirken, sie verfehlen aber dieses Ziel, wenn die vorgegebenen – notwendigerweise vereinfachenden – Daten zu offensichtlich unplausiblen Ergebnissen führen; eine Scheinanwendung dieser Art ist die Aufgabe in Abschnitt 3.

Alle Beispiele stammen aus dem Berliner Zentralabitur für Grundkurse, veröffentlicht auf dem Bildungsserver Berlin-Brandenburg (bbb 2017). Dort sind leider keine Lösungen zu finden, die Rückschlüsse auf den Erwartungshorizont der Verfasser der Aufgaben zulassen. Man kann aber wohl davon ausgehen, dass die Lösungen in einer Aufgabensammlung zur Abiturvorbereitung (Flohrer et al. 2017) die Erwartungen der Aufgabensteller an die Prüflinge widerspiegeln.

2 Binomial- oder Lotto-Modell?

Aufgabe 3.1 „Sommerfest“ aus dem Grundkurs-Abitur 2014 beginnt folgendermaßen:

> „Jana geht am Wochenende mit ihrer Schwester auf ein Sommerfest. An einer Losbude kann man Lose aus einer großen Trommel ziehen. Zehn Prozent der Lose sind Gewinnlose, die restlichen sind Nieten […].
>
> a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden Ereignisse:
> A: Unter 20 gezogenen Losen sind nur Nieten.
> B: Genau drei von 20 gezogenen Losen gewinnen einen Preis.
> C: Unter 20 gezogenen Losen sind mindestens drei Lose, die einen Preis gewinnen.“

In der Lösung heißt es nur knapp „Es liegt eine Bernoulli-Kette der Länge $n = 20$ und der Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0{,}1$ vor.“ Da es hier aber um ein Ziehen *ohne* Zurücklegen geht (Lotto-Modell), müsste statt der Binomial- die Hypergeometrische Verteilung (oder ein Baumdiagramm) zur Lösung verwendet werden. Eine Abiturientin äußerte dazu: „Es gibt hier kein N (sie meint die Gesamtzahl der Lose), darum habe ich mit der Binomialverteilung gerechnet.“ Eine bessere Begründung wäre natürlich gewesen, dass sich beide Verteilungen für $n \ll N$ nur unwesentlich unterscheiden (im Aufgabentext steht ja „Lose aus einer großen Trommel“). Aber eine Begründung wurde offenbar gar nicht erwartet, mit der Formulierung „10 % der Lose sind Gewinnlose“ werden dem Prüfling die Folgerungen „$p = 0{,}1$“ und „Binomialverteilung“ nahegelegt; erst im späteren Aufgabenteil c) wird dann, wohl im Kontrast zu a), die Arbeit mit dem Lotto-Modell erwartet:

> „c) Jana kauft zehn Lose. Sie hat zwei Gewinnlose und acht Nieten. Zwei Lose schenkt sie ihrer Schwester ohne zu prüfen, ob es sich dabei um Gewinnlose oder Nieten handelt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Jana dann noch genau ein Gewinnlos hat.“

Dass die Approximation mit der Binomialverteilung in Teilaufgabe a) tatsächlich nicht besonders gut ist, zeigt die folgende Tabelle, in der die korrekten Lösungen für $N = 100$ und $N = 200$ den näherungsweisen gegenübergestellt sind:

Modell		A	B	C
Binomialverteilung		0,122	0,190	0,323
Hypergeom. Verteilung	$N = 100$	0,095	0,209	0,319
	$N = 200$	0,109	0,199	0,321

Die Lösung von Flohrer et al. (2017) mit Binomialverteilung ist für $N = 100$ bei Ereignis A um 28 % zu groß, bei B um 9 % zu klein; auch für $N = 200$ ist der Unterschied noch $+12$ % bzw. -5 %. Lediglich die Näherungslösungen für C sind akzeptabel.

3 Plausible Wahrscheinlichkeiten?

In diesem und dem folgenden Abschnitt geht es um Aufgabe 3.2 „Fußball“ aus dem Grundkurs-Abitur 2013, ein Interessengebiet vieler Prüflinge, für das aber die Erfinder der Aufgabe anscheinend nicht sehr kompetent waren. Als Rahmen dient folgende Situation: Bei einem Fußballturnier haben die Mannschaften A und B das Finale erreicht.

Schon die Frage der ersten Teilaufgabe hat wenig mit der Realität zu tun:

„a) Für die Startelf wählt der Trainer der Mannschaft A einen von drei Torhütern und 10 von 15 Feldspielern aus. Berechnen Sie die Anzahl der Möglichkeiten, die der Trainer hat, die Mannschaft zusammenzustellen."

Berücksichtigt man, dass Feldspieler auf bestimmte Aufgaben (Abwehr, Mittelfeld, Angriff) spezialisiert sind, erscheint die in der Lösung angegebene Anzahl von 9009 völlig unrealistisch.

Ein ebenso unplausibles Ergebnis hat die anschließende Teilaufgabe:

„b) Erfahrungsgemäß wird jeder der 11 Spieler mit einer Wahrscheinlichkeit von 6 % ausgewechselt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für die folgenden Ereignisse:
C: Es wird kein Spieler ausgewechselt.
D: Es wird genau ein Spieler ausgewechselt.
E: Es werden 2 oder 3 Spieler ausgewechselt."

Die Formulierung „Erfahrungsgemäß …" entbehrt hier jeder Grundlage, denn die rechnerische Lösung $P(C) \approx 0{,}506$ (mit der Binomialverteilung $B_{11;0{,}06}$) würde bedeuten, dass in jedem zweiten Spiel überhaupt kein Spieler ausgewechselt wird, was jeder Erfahrung widerspricht. Auch der Erwartungswert von 0,66 Auswechslungen je Spiel ist viel zu klein, der wahre Wert dürfte bei 2 liegen. Damit wäre auch die Wahrscheinlichkeit für die Auswechslung eines einzelnen Spielers dreimal so groß: $p \approx 0{,}18$. In der folgenden Tabelle sind die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse C, D und E für die Trefferwahrscheinlichkeiten $p = 0{,}06$ und $p = 0{,}18$ gegenübergestellt:

p	C	D	E
0,06	0,506	0,355	0,135
0,18	0,113	0,272	0,495

Beachtet man, dass höchstens drei Spieler in einer Partie ausgewechselt werden dürfen, so erfassen die unvereinbaren Ereignisse C, D und E alle erlaubten Fälle, die Summe ihrer Wahrscheinlichkeiten sollte also 1 sein. Dies ist offenbar nicht der Fall, so dass sich das Binomial-Modell für diese Aufgabe als unangemessen erweist.

4 Konstante Trefferwahrscheinlichkeit?

Eine wesentliche Voraussetzung für die Verwendung der Binomialverteilung ist die konstante Trefferwahrscheinlichkeit in den einzelnen Stufen der Bernoulli-Kette. Auch in dieser Hinsicht war das Binomial-Modell im Fußballbeispiel aus Abschnitt 3 fragwürdig, denn die Annahme, für jeden Spieler sei die Wahrscheinlichkeit ausgewechselt zu werden dieselbe, ist sehr unrealistisch.

Noch deutlicher wird die Realitätsferne der Aufgabe im Einleitungstext zu den folgenden Teilen c) bis f):

„Da das Spiel auch nach der Verlängerung noch unentschieden steht, müssen beide Mannschaften ins Elfmeterschießen. Dafür wird angenommen, dass jeder Spieler von Mannschaft A eine Trefferquote von 80 % und jeder Spieler von Mannschaft B eine Trefferquote von 75 % hat."

Hier wird also explizit konstante Trefferwahrscheinlichkeit „angenommen", aber nur für alle Schützen von jeweils einer Mannschaft. Wer nur oberflächlich an Fußball interessiert ist, weiß aber, dass es sichere und unsichere Elfmeter-Schützen gibt und dass die nervliche Belastung je nach Stand des Vergleichs zu Fehlleistungen führen kann, so dass gerade keine einheitliche Wahrscheinlichkeit angenommen werden kann. Durch die Vorgabe von 80 % bzw. 75 % ermöglichten die Verfasser der Aufgabe willkürlich ein Binomialmodell; die in diesem dann berechneten Resultate sind aber in der Realität wertlos.

5 Schlussbemerkungen

Abschließend möchte ich einige Hinweise geben, wie man die in der Aufgabenanalyse aufgezeigten Probleme vermeiden oder entschärfen kann.

Beim Beispiel „Sommerfest" sollte für die Wahl des Binomial-Modells eine *Rechtfertigung* verlangt werden, da hier ein Zufallsexperiment ohne Zurücklegen behandelt wird. Dass die Voraussetzung für eine gute Approximation ($n \ll N$) erst bei einigen hundert Losen in der Trommel erfüllt ist, liegt hier auch daran, dass $n = 20$ relativ groß gewählt wurde.

Das Beispiel „Fußball" zeigt: So motivierend Aufgabenstellungen aus dem Erfahrungsbereich Jugendlicher sein mögen, muss man sich doch davor hüten, um der mathematischen Lösbarkeit willen zu stark vereinfachende oder sogar im jeweiligen Kontext unsinnige Annahmen vorzugeben. Stochastische Situationen wie im Beispiel „Sommerfest" vermeiden dieses Problem und haben plausible Ergebnisse.

Literatur

bbb (2017): www.bildungsserver.berlin-brandenburg.de/unterricht/pruefungen/abitur-berlin/ (Zugriff: 8.5.2017)

Flohrer et al. (2017): Abitur 2017 (Berlin Mathematik GK) – Original-Prüfungsaufgaben mit Lösungen. Freising: Stark-Verlag.

Anschrift des Verfassers

Gerd Riehl
Obere Mark 6
30890 Barsinghausen
Gerd.Riehl@t-online.de